ВИБРАНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ЩОДО ЗМІСТОВОГО МОДУЛЯ № 2 «ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ»

Тема 4. Елементи теорії ймовірності	• Ймовірність випадкової події. • Теореми додавання і множення ймовірностей.

Випробування — це реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подією називається результат експерименту або спостереження, який при реалізації даного комплексу умов може відбутися або не відбутися. Подія є результатом випробування.

Існує **класифікація подій**. Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається **достовірною**.

Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається **неможливою**.

Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається **випадковою**.

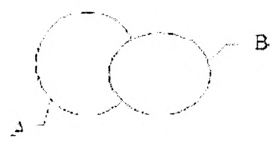
Випадкові події називають **залежними**, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась інша подія чи ні. У протилежнім випадку події називаються **незалежними**.

Випадкові події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному експерименті.

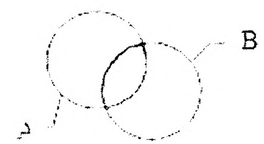
Випадкові події називають **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших.

В теорії ймовірності вводяться **поняття операцій** додавання, множення та віднімання подій.

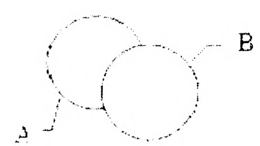
При додаванні подій, **сумою подій** А і В називається така подія С=А+В (С=А∪В), яка полягає у появі подій А або В. Операція А∪В ще називається **об'єднанням подій** А і В.



При множенні подій, **добутком подій** А і В називається така подія С=АВ (С=А∩В), яка настає з одночасним настанням подій А і В. Операція А∩В називається **перетином подій** А і В:



При відніманні подій, **різницею подій** А і В називається така подія С=А-В (С=А\В), яка настає з настанням події А і одночасним настанням події В.



Ймовірність - число з інтервалу [0, 1], що є виміром шансу випадкового явища.

Ймовірність $P(A)$ випадкового явища виражається співвідношенням кількості результатів, які сприяють певному явищу, до загальної кількості всіх можливих явищ у певному випадковому експерименті:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – загальна кількість однаково можливих і несумісних подій, які утворюють повну групу, m – число елементарних подій, які сприяють події A. Це класичне визначення ймовірності для випадкових експериментів зі скінченною кількістю явищ з однаковою ймовірністю.

Ймовірність будь-якої події задовольняє подвійну нерівність

$$0 \le P(A) \le 1,$$

причому ймовірність неможливої події дорівнює нулю, а достовірної – одиниці.

Теорема додавання ймовірностей

Ймовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей кожної події окремо, тобто

$$P\ (A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Якщо в результаті досліду обов'язково повинна реалізуватись одна із подій A_1, A_2, ..., A_n і ніяка інша подія реалізуватись не може, то говорять, що ці події утворюють **повну групу**.

Якщо для деякої події A сприятливими є всі n випадків, котрі утворюють повну групу несумісних подій, то ймовірність такої події:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Дві події A і $\overline{A}$ називаються **протилежними**, якщо вони несумісні і утворюють повну групу. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Ймовірность об'єднання двох випадкових сумісних подій:

$$P\ (A_1 \text{ або } A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \text{ і } A_2),$$

де $P(A_1 \text{ і } A_2)$ – ймовірність перетину подій A_1 і A_2.

Теорема множення ймовірностей

Ймовірність перетину (добутку) двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 \text{ і } A_2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2).$$

Для залежних подій користуються поняттям **умовної ймовірності** $P_A(B)$ – ймовірності реалізації події B за умови, що подія A відбулася.

Ймовірність перетину (добутку) двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності $P(A)$ реалізації події A, на умовну ймовірність $P_A(B)$ реалізації події B за умови, що подія A вже реалізувалася:

$$P(A \text{ і } B) = P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B).$$

Тема 5. Елементи математичної статистики	
	• Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. • Закони розподілу випадкових величин. • Довірчі ймовірності та довірчі інтервали. • Функціональна і кореляційна залежності. • Рівняння регресії. • Коефіцієнт кореляції.

Математичною статистикою називається розділ математики, що вивчає методи обробки даних досліджень, що отримуються в результаті спостережень над випадковими явищами.

Методи математичної статистики безпосередньо пов'язані з імовірнісними оцінками усереднених результатів серій випробувань. Теоретичною основою математичної статистики є теорія ймовірностей.

Статистичні характеристики рядів даних

Важливими характеристиками випадкової величини є усереднені значення, а саме: середнє арифметичне спостережених значень, мода, медіана, а також показник розсіювання (варіації) спостережених значень випадкової величини – розмах вибірки.

Середнє арифметичне спостережених значень обчислюється за формулою:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

де n – кількість спостережень, в яких досліджувана випадкова величина X набуває одного із своїх можливих значень x_i (i=1,2,3,...).

Мода – це значення випадкової величини, яке найчастіше зустрічається у вибірці. Таких значень може бути декілька.

Медіана – це значення змінюваної ознаки, яке ділить множину даних навпіл, так що одна половина значень випадкової величини більша від медіани, а друга - менша.

Розмах вибірки дорівнює різниці між максимальним і мінімальним значеннями сукупності спостережених значень і є найпростішою характеристикою розсіювання спостережених значень.

Розмах вибірки не можна вважати задовільною оцінкою розсіювання, оскільки він залежить тільки від двох крайніх значень варіаційного ряду і не враховує статистичні ймовірності проміжних варіант і особливості розподілу статистичних ймовірностей.

Основні кількісні характеристики розподілу випадкових величин

Математичне сподівання або **середнє значення** випадкової величини

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_1 X_1 + P_2 X_2 + \ldots + P_n X_n.$$

Якщо всі випадкові події рівноймовірні, тобто $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 1/n$, де n – повне число випадкових подій, то в цьому окремому випадку математичне сподівання зводиться до середнього арифметичного:

$$M(X) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Математичне сподівання має такі властивості:

(а) $M(C) = C$, де C – стала.

(б) $M(CX) = CM(X)$.

(в) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

(г) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X і Y – незалежні випадкові величини.

2. **Дисперсія $D(X)$** випадкової величини X

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсія – це математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання. Інший вираз для дисперсії має вигляд

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Дисперсія – це різниця математичного сподівання квадрата випадкової величини і квадрата математичного сподівання цієї величини.

Дисперсія має такі властивості:

(а) $D(C) = 0$, де C – стала.

(б) $D(CX) = C^2 D(X)$.

(в) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, де X і Y – незалежні випадкові величини.

Для характеристики відхилення не середнього квадрата, а самої випадкової величини вводиться поняття середнього квадратичного відхилення σ.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ пов'язане з дисперсією формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Видно, що розмірність σ збігається з розмірністю самої випадкової величини X.

Перестановки, розміщення, комбінації

Розглянемо **розділ комбінаторики**, що вирішує окремі задачі, пов'язані з аналізом різних комбінацій елементів множин. Залежно від правил утворення виділяють три типи комбінацій: перестановки, розміщення, сполучення.

Для введення відповідних означень використовують поняття факторіалу. Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називають ***n*-факторіалом** і пишуть:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Вважають, що $0! = 1$ і $n \in N$.

Основна властивість факторіала: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Перестановка n елементів множини A без повторень – це розміщення по n елементів, тобто послідовність елементів множини A, що має довжину n і попарно різні члени.

Число перестановок множини з n елементів дорівнює

$$P_n = n!.$$

Упорядковані k-елементні підмножини множини, що містять n елементів, називаються **розміщеннями** з n по k. Число розміщень з n по k дорівнює

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Цю формулу можна записати також у факторіальній формі

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Основні властивості розміщень:

1) $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$;

2) $A_n^n = P_n = n!$.

Сполученнями називаються всі можливі комбінації з n елементів по m, які відрізняються друг від друга принаймні хоча б одним елементом ($m, n \in N$ і $n \geq m$).

У загальному випадку число сполучень із n елементів по m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, що поділене на число перестановок з m елементів: $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$.

Цю формулу можна записати також у факторіальній формі

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!},$$

використовуючи відповідні факторіальні формули для числа розміщень $A_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ і перестановок $P_n = n!$.

Основні властивості сполучень:

1) $C_n^{n-m} = \dfrac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$;

2) $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Біном Ньютона

Біном Ньютона – це вираз вигляду $(a+b)^n$.

Біном розкладається в суму одночленів, які є добутками ряду ступенів його доданків a і b.

Формули розкладу бінома Ньютона в многочлен із степенями n=2 та 3:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

В загальному випадку розклад бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^m a^{n-m} b^m + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Основні закони розподілу випадкових величин

Біноміальним розподілом називають *дискретний* ймовірнісний розподіл, що характеризує кількість позитивних результатів в послідовності експериментів, значення яких змінюється за принципом «так/ні», кожен з яких набуває позитивного результату з ймовірністю P.

Біноміальний розподіл ймовірності того, що подія A реалізується m разів у серії з n випробувань, визначається формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де p – ймовірність появи події A в одному досліді; $q = 1-p$ – ймовірність того, що подія A не з'явиться в одному досліді; C_n^m – число можливих комбінацій із n елементів по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Розподілом Пуассона називають розподіл ймовірностей, які визначаються формулою Пуассона. Для визначення ймовірності того, що подія, ймовірність якої мала ($p < 0.1$), відбудеться m разів у серії з n випробувань (n – достатньо велике), використовують формулу Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$ – середнє значення числа випадків, в яких реалізується дана подія.

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Закон розподілу *неперервної* випадкової величини x називається нормальним, якщо щільність розподілу дорівнює:

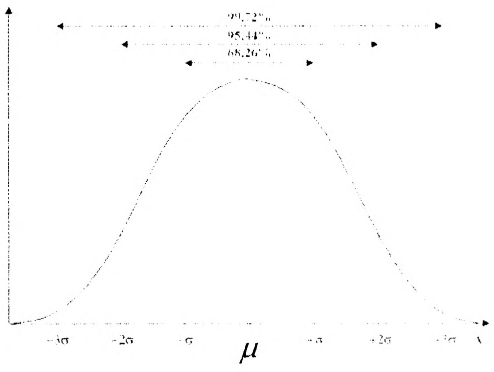
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де параметр μ – середнє значення (математичне сподівання) випадкової величини x; параметр μ вказує абсцису, координату по вісі OX, максимуму кривої щільності розподілу; $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ - вказує ординату, координату по вісі OY, максимуму кривої щільності розподілу; σ – середнє квадратичне відхилення.

Нормальний розподіл з параметрами $\mu = 0$ та $\sigma = 1$ називають нормованим, а формула для щільності розподілу в такому випадку набуває виду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Графік розподілу Гауса описується симетричною відносно μ кривою:



Довірчі ймовірності та довірчі інтервали.

Інтервал $(a;b)$, що містить невідомий параметр θ із заданою ймовірністю β, називають **довірчим інтервалом**, що відповідає **довірчій ймовірності** β. Верхня та нижня границі інтервалу $(a;b)$, що покриває з заданою імовірністю β невідомий параметр θ, називаються **довірчими границями**. Цьому відповідає формула:

$$P(a < \theta < b) = \beta.$$

При достатньо великих вибірках (при n>30-40), довірчий інтервал $(a;b)$ обирається симетричним відносно параметру θ, тобто $(\theta-\Delta;\ \theta+\Delta)$, а найбільше відхилення Δ вибіркової середньої, від генеральної середньої, яке можна задати з довірчою ймовірністю β, називається **граничною похибкою вибірки**.

Кореляція та регресія

Ознака, що характеризує наслідок, називається **результативною**, а та, що характеризує фактор (умову або причину), **- факторною**.

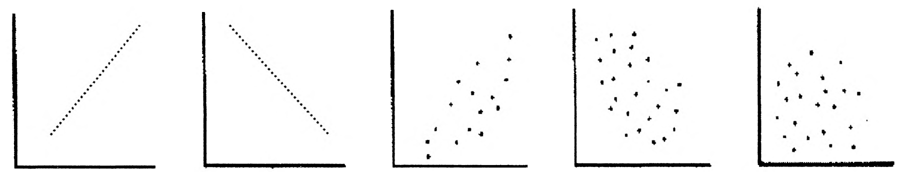
Функціональний зв'язок передбачає, що певному значенню факторної ознаки завжди відповідає одне або кілька значень результативної ознаки. Функціональні зв'язки можна описати математичною формулою та задати таблично, графічно або вербально.

Кореляційний зв'язок проявляється, коли кожному значенню ознаки X відповідає певна множина ознаки Y, які варіюють і утворюють ряд розподілу. Кореляційний аналіз дозволяє оцінити щільність зв'язку між ознаками, описати невідомі причинні зв'язки і визначити фактори, що мають найбільший вплив на результативну ознаку.

Для характеристики кореляційного зв'язку між випадковими величинами використовують **коефіцієнт кореляції** r, який є мірою залежності між цими величинами. Коефіцієнт кореляції r визначається за формулою

$$r = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Коефіцієнт кореляції може варіюватися в межах максимального значення, що дорівнює +1 (повна позитивна кореляція) та мінімального значення –1 (повна негативна кореляція). Якщо випадкові величини не залежать одна від одної (не корелюють між собою), то $r = 0$. Графічний аналіз дозволяє робити наближені висновки щодо значень коефіцієнту кореляції.



$r = 1$ $\quad$ $r = -1$ $\quad$ $r = 0{,}6$ $\quad$ $r = -0{,}3$ $\quad$ $r = 0$

Коли точки на координатній площині розподіляють у формі «хмари», тоді коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною стає меншим за 1, і у випадку округлення форми наближається до 0.

Регресійний аналіз має на меті встановлення форми залежності, визначення функції регресії, використання рівняння регресії для оцінки невідомих значень залежної змінної (результативної ознаки) та їх прогнозування.

Рівняння регресії характеризує зміну середнього рівня результативної ознаки залежно від зміни факторної ознаки.

Найпростіший вид регресії — **лінійна регресія**. В цьому випадку рівняння регресії представлене лінійною функцією $y(x) = b + ax$, яка має графік у вигляді прямої лінії, точки якої максимально наближені до точок, які відповідають значенням результативної ознаки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Завдання №1

Обчислити похідну функції: $y = \dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x}{\ln x}$.

Розв'язання:

$$y = \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x}{\ln x};\ y' = \frac{(\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x)'\ln x - \sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\left[\left((x)^{1/2}\right)'\mathrm{tg}\,x + \sqrt{x}(\mathrm{tg}\,x)'\right]\ln x - \sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x(\ln x)'}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{2}(x)^{1/2-1}\right)\mathrm{tg}\,x + \sqrt{x}\frac{1}{\cos^2 x}\right]\ln x - \sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}\,x + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}\right]\ln x - \sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{\left[\cos^2 x\cdot\mathrm{tg}\,x + 2x\right]\ln x - 2\,\mathrm{tg}\,x\cdot\cos^2 x}{2\sqrt{x}\cos^2 x\cdot\ln^2 x} = \frac{(\sin 2x + 4x)\ln x - 2\sin 2x}{4\sqrt{x}\cos^2 x\cdot\ln^2 x}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{(\sin 2x + 4x)\ln x - 2\sin 2x}{4\sqrt{x}\cos^2 x\ln^2 x}$.

Завдання №2

Обчислити похідну функції: $y = e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x}$.

Розв'язання:

$$y' = \left[e^{3x}\right]'\cdot tg^2\sqrt{x} + e^{3x}\cdot\left[tg^2\sqrt{x}\right]' = 3e^{3x}\cdot(3x)'\cdot tg^2\sqrt{x} + e^{3x}\cdot 2tg\ \sqrt{x}\cdot(tg\ \sqrt{x})' =$$

$$= 3e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x} + e^{3x}\cdot 2tg\ \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' = 3e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x} + 2\frac{tg\sqrt{x}\cdot e^{3x}}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Відповідь: $y' = 3e^{3x}\cdot tg^2\sqrt{x} + 2\dfrac{tg\sqrt{x}\cdot e^{3x}}{\cos^2\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Завдання №3

Обчислити похідну функції: $y = \ln(1 + 3\cos x)\cdot arctg5x$.

Розв'язання:

$$y' = \left[\ln(1 + 3\cos x)\right]'\cdot arctg5x + \ln(1 + \cos 3x)\cdot(arctg5x)' =$$

$$= \frac{-3\sin x\cdot arctg5x}{1 + \cos 3x} + \frac{5\ln(1 + 3\cos x)}{1 + 25x^2}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{-3\sin x\cdot arctg5x}{1 + \cos 3x} + \dfrac{5\ln(1 + 3\cos x)}{1 + 25x^2}$.

Завдання №4

Тіло рухається прямолінійно за законом $S=\frac{1}{4}t^4-2t^3+\frac{5t^2}{2}$ (час t від початку руху вимірюється в секундах, шлях S – відстань від початкового пункту у метрах). Визначити моменти часу, коли швидкість тіла дорівнює нулю?

Розв'язання:

Миттєва швидкість точки визначається як $V(t)=S'(t)$, тобто отримуємо $V(t)=t^3-6t^2+5t$. За умовою, визначаємо моменти часу, коли швидкість дорівнює нулю, тобто $t^3-6t^2+5t=0$. З цього рівняння отримуємо: t_1=0 с, t_2=1 с, t_3=5 с.

Відповідь: t_1=0 с, t_2=1 с, t_3=5 с.

Завдання №5

Знайти точки екстремуму й інтервали монотонності функції $y=\frac{x^2+4}{x}$.

Розв'язання:

Функція визначена на всій числовій осі, крім точки x=0.

Знайдемо критичні точки функції через обчислення її похідної $y'(x)$:

$$y'=\frac{2x\cdot x-(x^2+4)}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}.$$

Похідна не існує в точці x_2=0 і дорівнює нулю в точках x_1=-2, x_3=2, тобто, є три *критичні точки*.

Визначаємо, що перша похідна додатня при $|x|>2$ і від'ємна при $|x|<2$. Отже, функція зростає на інтервалах (-∞, -2) і (2, ∞) і спадає на інтервалах (-2, 0) і (0, 2).

При переході через точку x_1=-2 похідна змінює знак "+" на "-", отже, точка x_1=-2 є *точкою максимуму* функції і $y_{\max}=y(x_1)$=-4. У разі переходу через точку x_2=0 похідна не змінює свого знака, отже, точка x_2=0 не є точкою екстремуму функції. При переході через точку x_3=2 похідна змінює знак "-" на "+", отже, x_3=2 є *точкою мінімуму* функції і $y_{\min}=y(x_3)$=4.

Завдання №6

Обчислити інтеграл: $\int\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx=2\int\sqrt{x}dx+\int 1dx=2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+x+C=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C.$$

Відповідь: $\int\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x+C$.

Завдання №7

Обчислити інтеграл: $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

Розв'язання:

$$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int 1dx+\int\cos x dx\right)=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C.$$

Відповідь: $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

Завдання №8

Обчислити інтеграл: $\int ctg^2x\,dx$.

Розв'язання:

$$\int ctg^2x\,dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-ctgx+x+C.$$

Відповідь: $\int ctg^2x\,dx=-ctgx+x+C$.

Завдання №9

Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x dx;$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 1/2.

Завдання №10

Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^1 xe^{x^2}dx;$.

Розв'язання:

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1);.$$

Відповідь: $(e-1)/2$.

Завдання №11

Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Розв'язання:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=arctg(x+1)\Big|_{-1}^{0}=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\pi/4$.

Завдання №12

Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$.

Розв'язання:

$$S=\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}(\text{кв. од.}).$$

Відповідь: 2/3 (кв. од.).

Завдання №13

Обчислити площу області, обмеженої лініями $y=-x^2$, $y=e^x$, віссю ординат і прямою $x=1$.

Розв'язання:

$$S=\int\limits_{0}^{1}\left[e^x-(-x^2)\right]dx=\left(e^x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=e+\frac{1}{3}-1=e-\frac{2}{3}\ (\text{кв. од.}).$$

Відповідь: e-2/3.

Завдання №14

Множина M утворена з чотирьох букв A, B, C, D. Скласти комбінації з двох букв, що відрізняються друг від друга хоча б одним елементом.

Розв'язання:

Маємо AB, AC, AD, BP, BD, CD. Виходить, що число сполучень з чотирьох елементів по двоє дорівнює 6. Це коротко записується так: $C_4^2=6$.

Відповідь: 6.

Завдання №15

В ящику 10 червоних ґудзиків та 6 синіх. Вийняли два ґудзика. Яка ймовірність того, що ґудзики будуть одного кольору?

Розв'язання:

Загальна кількість ґудзиків: 10 + 6 = 16.

Загальна кількість можливих пар ґудзиків – *комбінація без повторень* з 16 по 2:

$$N(\Omega)=C_{16}^2=\frac{16!}{2!(16-2)!}=\frac{15\cdot16}{2}=120.$$

Нехай A – подія, що відповідає тому, що обидва ґудзики червоного кольору, B – подія, що відповідає тому, що обидва ґудзики синього кольору. Тоді число можливих пар червоних ґудзиків – комбінація без повторень з 10 по 2:

$$N(A)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{9\cdot10}{2}=45,$$

синіх ґудзиків - комбінація без повторень з 6 по 2:

$$N(B)=C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{5\cdot6}{2}=15.$$

Ймовірність того, що ґудзики будуть одного кольору дорівнює сумі ймовірностей того, що ґудзики будуть червоного та синього кольорів.

Кількість пар ґудзиків одного кольору

$N(A\cup B)=N(A)+N(B)=45+15=60,$ а шукана ймовірність:

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: 1/2.

Завдання №16

Статистика результатів складання іспиту є наступною:

Оцінка за іспит	12	10	8	6	4
Кількість учнів, які отримали оцінку	3	4	7	11	2

Визначити значення середньої оцінки та моду.

Розв'язання:

Визначимо середнє арифметичне за формулою:

$$\bar{x}=\frac{12\cdot3+10\cdot4+8\cdot7+6\cdot11+4\cdot2}{3+4+7+11+2}=\frac{206}{27}\approx7{,}6.$$

Найчастіше зустрічається оцінка "6" – це є мода даного ряду.

Відповідь: середня оцінка – "7,6" а мода – "6".

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Кожен з трьох запропонованих варіантів складається з дванадцяти однобальних тестових завдань. Всі завдання мають по п'ять варіантів відповідей, з яких лише одна є правильною. Необхідно провести розрахунки та визначити, яка саме відповідь є правильною. Бажаємо успіху!

Варіант 1

1. Знайти похідну функції: $y = \ln^5 x$.

А	Б	В	Г	Д
$5\ln^4 x$	$\frac{\ln x}{5x}$	$\frac{5\ln^4 x}{x}$	$\frac{\ln^4 x}{5x}$	$\frac{1}{x^5}$

2. Обчисліть значення похідної функції $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ у точці $x=\pi/4$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

3. Знайти рівняння дотичної для функції $y = Sin\ x$ в точці $x=\pi$.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2(x-\pi)$	$y = 2\pi - x$	$y = 5(x-1)$	$y = x - 2$	$y = \pi - x$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^3 - 2t^2 + 2$ (час t вимірюється в секундах, шлях S – у метрах). Визначте миттєву швидкість його руху в момент t=2 c.

А	Б	В	Г	Д
5	7	2	4	1

5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;\infty)$	$(3;\infty)$	$(-\infty;0)$	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;-3)$

6. Укажіть функцію, яка є зростаючою на всій області визначення.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2 + x$	$y = -3x^2$	$y = \frac{5}{x}$	$y = -\sin x$	$y = \sqrt{2x}$

7. Знайдіть первісну функції $y = 3x^2$, яка проходить через точку $M_0(1;1)$.

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	x^3	$x^3 + 5$	$3x^3$	$3x^3 + 1$

8. Впорядкуйте за зростанням наступні величини: $a = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx$, $b = \int_{-1}^{0} 2x dx$, $c = \int_{0}^{1} x^3 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$c < b < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < c < a$

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$:

А	Б	В	Г	Д
1	4/3	2	5/4	3

10. Скільки всього різних п'ятицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 1, 3, 5, 7, 9?

А	Б	В	Г	Д
120	100	150	25	125

11. На картках написані числа від 2 до 10. Яка ймовірність того, що добуток чисел на навмання вибраних двох картках буде непарним числом?

А	Б	В	Г	Д
1/2	3/10	5/9	1/9	1/5

12. Задано 15 чисел. Серед них число 9 повторюється 5 разів, число 16 – 4 разів, число 37 – 6 рази. Знайдіть середнє арифметичне заданих чисел.

А	Б	В	Г	Д
22	29	30	27	32

Варіант 2

1. Знайти похідну функції: $y = 3^{tgx}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{tgx 3^{tgx-1}}{\ln x}$	$\frac{3^{tgx}}{\cos^2 x}$	$\frac{3^{tgx}\ln 3}{\cos^2 x}$	$3^{tgx}\ln 3$	$\frac{tgx}{\ln 3}$

2. Обчисліть значення похідної функції $y = (\sin 5x + \cos 5x)^{10}$ у точці $x=\pi/2$.

А	Б	В	Г	Д
-1	5	10	-50	1/2

3. Знайти рівняння дотичної для функції $y = x^2 + 3x + 1$ в точці $x_0=1$.

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$y = 5x$	$y = 2x + 1$	$y = x + 3$	$y = 3x - 1$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{1}{\sqrt{t+8}}$ (час t вимірюється в секундах, шлях S – у метрах). Визначте миттєву швидкість його руху в момент t=1 c.

А	Б	В	Г	Д
-1/54	-1/7	1/2	1	1/3

5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;2)$	$(3;\infty)$	$(2;3)$	$(-2;\infty)$	$(1;5)$

6. Укажіть функцію, яка є спадною на інтервалі $(-\infty;0)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3x^2$	$y = 2 + x$	$y = \sqrt{2x}$	$y = -\sin x$	$y = \frac{5}{x}$

7. Знайдіть первісну функції $y = 2e^{2x}$, графік якої проходить через точку M_0 (0;1).

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$\ln 2x$	$2e^x$	e^{2x}	$\frac{e^{2x}}{2x}$

8. Впорядкуйте за зростанням наступні величини: $a = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx$, $b = \int_{-1}^{0} xdx$, $c = \int_{0}^{1} x^7 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$b < a < c$	$c < b < a$	$b < c < a$	$a < c < b$	$a < b < c$

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = 1 + e^x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 0$:

А	Б	В	Г	Д
e	$4 + e^3$	$4 - e^{-3}$	$1 + e$	e^3

10. Скільки всього різних семицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 1,2,3,4,5,6,7?

А	Б	В	Г	Д
120	1020	2000	3040	5040

11. У коробці є 30 кульок, із яких 24 чорного кольору, а решта білого. Визначте ймовірність того, що навмання взята кулька з коробки буде білого кольору.

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,9	0,7	0,4	0,2

12. Група із семи абітурієнтів пройшла вступне тестування у ВНЗ. При цьому вони отримали наступні бали (за 200-бальною шкалою): 130, 160, 154, 127, 198, 180, 141. Знайдіть медіану цієї вибірки.

А	Б	В	Г	Д
154	127	150	130	200

Варіант 3

1. Знайти похідну функції: $y = \ln\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$-tgx$	$\frac{1}{\cos x}$	tgx	$-Ctgx$	$\frac{1}{\sin x}$

2. Обчисліть значення похідної функції $y = e^{x^3-3x^2-6x}$ у точці $x=1$.

А	Б	В	Г	Д
$3e^{-8}$	$-e^{8}$	$-9e^{-8}$	$-8e^{-8}$	e^{-8}

3. Знайти рівняння дотичної для функції $y = x^2$ в точці $x_0=3$.

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$y = 6x$	$y = x-9$	$y = 2x-3$	$y = 6x-9$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = 3t^3 + 7$ (час t вимірюється в секундах, шлях S – у метрах). Визначте миттєву швидкість його руху в момент $t=10$ *с*.

А	Б	В	Г	Д
30	300	307	900	907

5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = \frac{3x-1}{1-4x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1/4)\cup(1/4;\infty)$	$(-1/4;1/4)$	$(-1/4;1/4)\cup(1/4;\infty)$	$(-\infty;1/4)$	$(-\infty;\infty)$

6. Укажіть функцію, яка є зростаючою на інтервалі $(0;\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3x^2$	$y = \frac{5}{x}$	$y = \sqrt{2x}$	$y = -\sin x$	$y = 5-x$

7. Знайдіть первісну функції $y = \cos x$, графік якої проходить через точку M_0 (0;0).

А	Б	В	Г	Д
розв'язків немає	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$\frac{1}{\sin x}$

8. Впорядкуйте за зростанням наступні величини: $a = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2x dx$, $b = \int_{-1}^{0} 5x dx$, $c = \int_{0}^{1} x^5 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$b < c < a$	$c < b < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < a < c$

9. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$:

А	Б	В	Г	Д
1/2	-4	4	-3	1

10. Скільки всього різних трицифрових чисел (без повторення цифр) можна утворити з цифр 5, 7, 9?

А	Б	В	Г	Д
5	6	9	10	12

11. У коробці є 24 кульок, із яких 16 чорного кольору, а решта білого. Навмання обирають 2 кульки. Яка ймовірність того, що вони мають різний колір.

А	Б	В	Г	Д
0,23	0,38	0,46	0,61	0,84

12. Чому дорівнює середнє арифметичне ряду цілих чисел від 1 до n, якщо відомо, що $n!=720$?

А	Б	В	Г	Д
3,5	4	6	21	120